Symposium for International Pythagorean School

Da Pitagora a Schützenberger: numeri inimmaginabilîîî

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

REGIONE CALABRIA

PROGETTO UCAL

Symposium for an International Pythagorean School

Da Pitagora a Schützenberger: numeri inimmaginabilîîî

Monday, September 24
Aula Pitagora/MT15 Department of Mathematics and Computer Science (Demacs), University of Calabria

10.00 **Aula Pitagora, Chair: G. Greco.**
- Interventi istituzionali.
- G. d'Atri, "Homo numericus".
- H. Schützenberger, "Mon père".
- J. Desarmenien, "Marcel-Paul Schützenberger. From medicine to computer science and beyond: A multifaceted genius".

Coffee break discussion

- G. Pirillo, "Sur la possible attribution des principes d'induction et du minimum à l'École Pythagoricienne".

13.30 Light lunch

15.00 **Aula Pitagora, Chair: M. Crochemore.**
- A. Garro, "Relativity in Mathematical Descriptions of Automatic Computations".
- Y.D. Sergeyev, "Computations with numerical infinities and infinitesimals".

Coffee break discussion

- D. Saccà, "A functional abacus".
- T. Le Van, "Bedford's law for checking financial reports".
- F. Caldarola, "Numbers: from Geometry to Diophantine Systems and Number Theory".

20.30 Dinner (Pythagorean diet: no meat)

Martedì 25 settembre
Crotone, "Attualità degli studi pitagorici"

Sala Conferenze dei Giardini di Pitagora, Chair: G. d'Atri
10.00 Saluti e interventi istituzionali.
10.15 P. Arnoux, "La sezione aurea".
11.00 G. Pirillo, "L'origine pitagorica dei numeri di Fibonacci".
11.45 P. Pantano, "Dai numeri alla forma e alla materia".

12.15 Tavola rotonda: "Attualità degli studi pitagorici: ricerca, trasferimento tecnologico e progetti integrati di sviluppo locale".
Moderatore: M. Maiolo.

13.30 Lunch

15.00 Visita ai musei Archeologici di Crotone e Capo Colonna, con la guida di Onorato Tocci.

Alla fine trasferimento verso l'Unical

19.30 Sulla strada del ritorno, cena di gala in Sila.

Wednesday, September 26
Aula Pitagora, Department of Mathematics and Computer Science (Demacs), University of Calabria

9.30 **Aula Pitagora, Chair: G. Pirillo.**
- J.-P. Allouche, "A hike in combinatorics on words".
- M.G. Turri, "Il senso del numero: ontologia, metafisica e... neuroscienze".
- P. Arnoux, "Dynamique du nombre d'or".
- M. Crochemore, "The Knuth-Morris-Pratt Algorithm".

13.30 Light lunch

15.00 **Aula Pitagora, Chair: J. Desarmenien.**
- G. Greco, "Intelligent numbers".
- D. Perrin, "Algèbre non commutative et informatique théorique dans l'ouvre de Schützenberger".
- A. Leonardis, "Hybrid continued fractions and other applications of p-adic Heron's Algorithm".

18.00 G. d'Atri, The End.

Comitato organizzatore: Gianfranco d'Atri, Mario Maiolo, Giuseppe Pirillo, Fabio Caldarola.
Segreteria e informazioni: www.unicalcoin.it

COSENZA 24-26 SETTEMBRE 2018 CROTONE

Il senso del numero

Ontologia, metafisica e … neuroscienze

24-25-26 settembre 2018

Maria Grazia Turri

Parallelo

Platone **Aristotele**

con fondamento

Pitagora

passando brevemente per

Gottlob Frege ed Edmund Husserl

cosa le neuroscienze ci dicono che sopravvivere di Platone e Aristotele

gli interrogativi attuali

Concreto e astratto

Gli egiziani e i greci dimostrarono sperimentalmente che la somma degli angoli interni di un triangolo equilatero è un angolo piatto: dall'osservazione delle mattonelle

I pitagorici, invece, dimostrarono razionalmente questa proprietà; cioè la dimostrarono senza l'aiuto dell'esperienza e prescindendo da ogni caso particolare

Così essa acquistò valore universale divenendo valida per triangoli di ogni tipo

Platone

La dottrina del numero attribuita a Platone si fonda essenzialmente sulle cosiddette "dottrine non scritte"

agrapha dogmata

La critica di Aristotele alle tesi platoniche si basa su queste e sulla critica delle teorie accademiche, perché a partire dalla supposta teoria di Platone si svilupparono nell'Accademia, in funzione di revisione critica di quest'ultima, le dottrine di Speusippo - eliminò sia le Idee che i numeri ideali e dai principi fece discendere direttamente i numeri matematici - e di Senocrate - il quale identificò totalmente le Idee con i numeri ideali

Attualizzazione delle tesi aristoteliche sul Platone "non scritto"

Aristotele sostiene che Platone, accanto a una dottrina pubblica, espressa nei *Dialoghi*,, sostanzialmente dopo il terzo e ultimo viaggio in Sicilia - ultimo periodo della sua speculazione - professava anche una dottrina non scritta, riservata ai soli membri dell'Accademia

Una tesi sostenuta e sviluppata a partire dagli anni '90 dalla Scuola di Tubinga con Thomas Szlezák (1985, *Platon und die Schriftlichkeit der Philosophie. Interpretationen zu den frühen und mittleren Dialogen*, tr. it. *Come leggere Platone*) e da quella di Milano con Giovanni Reale (1991, *Per una nuova interpretazione di Platone. Rilettura della metafisica dei grandi dialoghi alla luce delle "Dottrine non scritte"*)

Matematizzazione delle Idee

Nel *Parmenide* Platone descrive le difficoltà in ordine alla dimostrazione della esistenza delle Idee

Aristotele argomenta che nelle dottrine non scritte Platone avrebbe riconosciuto una struttura ontologica delle Idee basata su principi di ordine matematico, sicché l'impianto fondante stesso delle Idee sarebbe di genere matematico

L'Uno, il principio formale

La Diade indefinita di Grande e Piccolo, il principio materiale

I Pitagorici e Platone: il limite

I Pitagorici – incontrati durante i suoi viaggi in Sicilia - sostenevano che i numeri sono il risultato dell'azione di un *limite* o *peras* (Immanuel Kant e Carl Schmitt) su una quantità indeterminata o *apeiron*

I concetti di limite e confine avranno risvolti molto rilevanti in filosofia, ben aldilà della matematica

Quella del limite è un'assunzione che Carl Schmitt ricava dalla distinzione kantiana fra *Grenze*, il limite, e *Grenzlinie*, il confine (Kant 1787, § 57). Quest'ultimo può essere superato, mentre il limite va fondato in base all'esperienza che di esso è possibile avere, cioè tramite l'oltrepassamento dei confini stessi, i quali offrono la regola per la fondazione del sapere e della sua ragione. Il limite quindi non è soltanto qualcosa che ci fa conoscere ciò che sta al di qua di esso, ma è anche ciò che traccia una linea fra due domini che si toccano, ed è indubbiamente un termine che ha un carattere normativo, ma spinge intrinsecamente, di per sé, al suo superamento

Ontologia dei numeri

Ogni numero, in quanto tale, è una quantità, ed è una quantità finita, ed è tale perché è un aggregato finito, ossia limitato, di unità, ciascuna delle quali è un volume minimo, ossia una «unità dotata di posizione (*monàs échousa thésin*)»

Visto che i numeri hanno esistenza reale, sono cioè enti fisici, e in quanto tali costituiscono il fondamento, dato che sono i componenti ultimi delle cose

Le cose, infatti, nella loro costituzione ontologica sono, per l'appunto, numeri

Metafisica: la sostanza della realtà è matematica

La realtà è in sostanza, cioè metafisicamente, matematica

Se i numeri sono il fondamento delle cose la dottrina pitagorica è una dottrina in grado di fornire un supporto razionale, ossia una spiegazione del fatto che l'universo appare ordinato, sia nel suo insieme che in ogni sua parte e in ogni fenomeno

Il numero, pensato come costitutivo delle cose, è la chiave per comprendere quest'ordine: le stelle si muovono secondo un ordine matematicamente esprimibile, le stagioni si susseguono secondo periodi costanti calcolabili, i cicli della vita hanno un ordine matematico, le armonie musicali sono date da rapporti fra suoni, e un rapporto è un numero

Per i Pitagorici i numeri, in quanto aggregati di unità, erano rappresentati come una serie binaria che prosegue all'infinito, se trattasi di numeri pari; mentre nei numeri dispari un'unità chiude la seria binaria di per sé aperta all'infinito. Anche in questo senso e per quest'aspetto, dunque, principi del numero sono il limite e l'illimitato

Platone: struttura matematizzante delle Idee fonda la metafisica delle Idee

La Diade indefinita di Grande e Piccolo è principio materiale, ed è principio che esprime l'infinito in quanto è fattore duplicatore, o, comunque, matrice atta ad aumentare in ragione aggiuntiva di due, e tutta la cultura occidentale su questo si fonda: bene-male, bello-brutto, donna-uomo, ecc. (contraddizione kantiana)

L'Uno, in funzione di principio formale, s'impone su di essa (contraddizione hegeliana)

Dall'azione dell'Uno e della Diade si originano pertanto quelli che Platone chiama numeri ideali o Idee-numeri

L'unità duplicata dalla Diade dà luogo alla dualità, questa, a sua volta, alla quaternità, che, duplicata, dà luogo alla ottità. Per altro verso, la dualità, aggiunta all'unità dà luogo alla ternità la quale duplicata dà luogo alla seità, mentre la ternità aumenta di due dà luogo alla quinquità, alla settità, quindi alla nonità. Infine, dalla duplicazione della quinquità ha luogo la decade. Si originano così i primi dieci numeri

Si tratta di numeri ideali in quanto esprimono l'essenza dei corrispondenti numeri aritmetici: la ternità esprime l'essenza di tutti i tre, la quaternità l'essenza di tutti i quattro, e così via. Ecco perché sono limitati alla decade: con le essenze dei primi dieci numeri, si forma l'intera serie numerica

Dai numeri ideali derivano poi, in successione, le Idee, le quali, essendo prodotte dai numeri, hanno una struttura numerica; indi i numeri matematici, xhe a differenza di quelli ideali sono infiniti

Aristotele critica la natura metafisica dei numeri ideali perché le sostanze si moltiplicano

Le critiche mettono allo scoperto molteplici aspetti, ma tutte si articolano intorno a un motivo di fondo e cioè il fatto che i numeri, platonicamente intesi, sono sostanze, mentre in realtà non si tratta di sostanze, bensì di aspetti quantitativi degli enti fisici considerati astrattamente, ossia isolatamente da altri aspetti

Carattere proprio della sostanza è di essere per sé sussistente, di essere, cioè, un *ens in sé*, ovvero, di avere un'esistenza separata

Ora, i numeri ideali, in quanto Idee, hanno un'esistenza separata e come tali sono sostanze. Ma allora ecco che, in prima istanza, si avrà l'assurdo di sostanze nelle sostanze

Infatti, nella serie numerica ogni numero posteriore contiene tutti i numeri anteriori: per esempio, il cinque contiene il due, il tre e il quattro. Ma a sua volta il quattro contiene il tre e il due, e a sua volta il tre contiene il due. Ora, se i numeri sono sostanze, si avrà che una sostanza, ossia la quinquità, contiene un'altra sostanza, la quaternità; contiene inoltre altre due sostanze, e cioè la ternità contenuta nelle quinquità e la ternità contenuta nella quaternità, a sua volta contenuta nella quinquità; contiene infine altre tre sostanze, vale a dire la dualità o il due ideale contenuto nel cinque ideale e i due ideali contenuti rispettivamente nel quattro e nel tre ideali, a loro volta contenuti entrambi nel cinque ideale. Le sostanze si moltiplicano

Effetti della moltiplicazione delle sostanze: moltiplicazione dei principi

Ciascuna di esse, essendo un numero ideale, ossia un'Idea, ha per ciò stesso funzione di principio, una tale moltiplicazione delle sostanze finisce per essere una moltiplicazione a dismisura dei principi

Viene così a crearsi una situazione che smentisce la funzione esplicativa stessa del principio, giacché spiegare significa ricondurre molti casi a un numero limitato di regole, aventi per l'appunto funzione di principi; ma se le regole, ossia i principi, crescono a dismisura, essi non spiegano nulla, ma semplicemente richiedono a loro volta di essere spiegati, ossia di essere ricondotti a poche regole principiali

L'aritmetica, in quanto scienza dei numeri, avrà per oggetto i numeri matematici pertanto la matematica deve occuparsi delle proprietà essenziali e dei suoi oggetti

Aristotele: il numero è un predicato

Il numero è un predicato, e precisamente quel predicato che predica il *plethos*, ossia la quantità successiva di unità di cui è costituita una cosa

In *Categorie 6* Aristotele annovera il numero, assieme al discorso, fra le quantità discrete, distinguendole dalle quantità continue, fra le quali annovera le linea, la superficie, il corpo o solido, assieme al tempo

Il tempo è una sequenza numerica ordinale che scorre parallela al movimento, il tempo è «il numero del movimento secondo il prima e il poi» (Aristotele, Fisica 200 b 14-15, 218b 9-219a 10, 219b2, 220b 32, 221b 26; Metafisica 105v 3b 16ss, 1056b 16-18)

Dunque, i numeri sono quantità discrete, mentre le grandezze geometriche sono quantità continue. Continuo, per Aristotele, è ciò che ha un confine in comune. Consecutivo è ciò in mezzo a cui non vi è nulla di omogeneo

Quando due cose consecutive si toccano in uno o più punti, le cose cono contigue-continue

Il genere della quantità

Il discreto è il contrario del continuo

In effetti, continuo e discreto cadono sotto la medesima categoria o genere massimo, ossia il genere della quantità, ed entro di essa verificano la massima distanza, e i contrari - com'è noto - sono i termini massimamente distanti entro un genere.

Il numero, dunque, essendo quantità discreta (a) è una quantità, rientra cioè in un genere categoriale che esprime non un soggetto (tale è la sostanza), ma un attributo, una proprietà; (b) è una quantità discreta, ossia un aggregato di determinazioni quantitative aventi fra loro confini separati

Poiché il numero è costituito da quantità minime strutturalmente separate le une dalle altre, il loro essere insieme scandisce una successione e il numero stesso esprime successione, laddove le grandezze, per il fatto stesso di essere quantità continue, danno luogo a estensione

Il numero è così un aggregato di quantità discrete in successione, mentre le grandezze sono quantità estese. Proprio per questo, mentre le grandezze sono sia aumentabili che divisibili all'infinito, esprimono cioè l'infinito nella potenza sia dell'aggiunzione che della divisione, il numero è infinitamente aumentabile ma non anche infinitamente divisibile, giacché trova nell'unità il limite della sua divisione

Il numero esprime l'infinito nella potenza dell'aggiunzione, ma non anche della divisione

Il predicato è reale, ma non per sé

La differenza della dottrina aristotelica del numero da quella pitagorica è esattamente quello di concepire il numero come un aggregato di unità e si áncora sul diverso modo di concepire l'unità

Per i Pitagorici l'unità è un volume minimo, o - più precisamente - è un «uno dotato di posizione (*monàs échousa thésin*)». Ciò significa che i numeri hanno non solo un'esistenza reale, ma un'esistenza autonoma o separata, sono cioè sostanze e coincidono con le cose

Al contrario, per Aristotele l'essere dell'unità è di essere indivisibile e, come tale, di essere la misura minima in ogni genere e soprattutto nel genere della quantità, giacché la misura ha a che fare in primo luogo con la quantità. Ma la quantità è un predicato, e un predicato pur non avendo un'esistenza autonoma o separata o per sé, ha tuttavia un'esistenza reale, ossia, è una determinazione realmente esistente, anche se non esistente per sé

In questo modo il numero è «astratto», ma non nel senso che è una pura costruzione mentale, ma nel senso che è la misura di una proprietà, tale per l'appunto essendo la quantità o, meglio, un tipo di quantità, isolata da altre proprietà, come il colore, il dove, il quando, ecc., e considerata per se stessa, ossia astrattamente da altre

Dimensione categoriale differente dalla sostanza: natura ontologica

Il numero sette, per esempio, indica la misura di quell'aspetto della quantità o di quel tipo di quantità che è *plethos*, ossia la pluralità o moltitudine di quantità discrete minime, perché indivisibili

Se le cose in oggetto sono le sedie, l'unita, ossia la quantità indivisibile, è la sedia, e il sette è la misura della moltitudine o pluralità di sedie

In tal senso il numero è misura e al tempo stesso è anche misurato; infatti, in quanto indicazione della quantità di unità in un genere di cose, esso è misurato dall'unita

Il numero non è affatto una mera costruzione mentale, ma l'elaborazione dottrinale di una dimensione categoriale dell'ente, e di una dimensione categoriale differente dalla sostanza

Aritmetica e geometria

Oggi Peter Scholze si cimenta in una teoria che unifichi l'aritmetica e la geometria

È possibile per Aristotele l'applicazione dell'aritmetica alla geometria

È possibile numerare una figura, ossia dare la fisionomia di quantità numerica a ciò che è invece una quantità estensiva

***Libro M della Metafisica*, le matematikà, le cose matematiche, o correlati supposti della scienza matematica**

Per spiegarlo è necessario riflettere sulla differenza strutturale fra i numeri e le grandezze al fine di cogliere, assieme allo specifico di entrambi, le condizioni alle quali fra queste due specie di quantità è possibile una convergenza

I numeri, in quanto misura della quantità di unità discrete, sono essi stessi quantità discrete, mentre le grandezze, in quanto quantità continue, tali cioè che ogni loro parte ha confini comuni con un'altra parte, non hanno propriamente un'unità, vale a dire una parte minima, perché essa sarebbe immediatamente connessa a un'altra parte così da formare un continuum, e proprio per il fatto di non avere un'unità le grandezze sono divisibili all'infinito

L'aritmetica è prima rispetto alla geometria

Ma se le grandezze non hanno un'unità possono tuttavia avere una misura: giacché è possibile assumere una parte della grandezza e farne un campione

Si tratta, ovviamente, di operazioni che non sono già conformi alla natura della grandezza (della linea, della superficie e del solido), ma che impongono un’unità di misura

Il numero è la misura della quantità delle unità nel genere delle lunghezze, delle superfici e dei solidi, e in tal senso l'aritmetica è prima rispetto alla geometria, ossia permette di calcolare numericamente in campo geometrico

La geometria è seconda rispetto all'aritmetica

Anche la misura di una grandezza, essendo un numero, è pertanto la misura di una quantità di unità, come il numero è un aggregato di unità numeriche, ma con la differenza che le unità numeriche sono misure prime naturali rispetto al numero, mentre le unità geometriche sono misure prime convenzionali rispetto alle grandezze, le quali, in quanto quantità continue, non hanno per loro natura una misura minima, ma sono divisibili all'infinito

L'arresto della divisione del continuo in una parte minima che funga da misura è perciò un atto convenzionale

L'abbinamento dell'aritmetica alla geometria è perciò l'imposizione di una misura a ciò che è per sua natura non è misurabile, e in questo senso la geometria è seconda rispetto all'aritmetica. Si tratta, in sostanza, di due ordini di quantità diversi, quello delle quantità discrete e quello delle quantità continue, e l'unificazione dei due piani è, in buona sostanza, una subordinazione dell'uno all'altro

La matematica: senza metafisica propria

Tema trattato da Aristotele nel *Libro B* della *Metafisica*

La matematica messa in relazione con il campo dell'esperienza evidenzia che l'oggetto matematico non è né separabile né inseparabile. Non è né trascendente né immanente

La verità è che la matematica non ha essere. O, più precisamente: in nessun luogo l'oggetto matematico esiste in atto. Le *matematikà* non esistono affatto, oppure in ogni caso non esistono oggetti matematici in maniera assoluta

La matematica è per Aristotele parte del cosmo, il quale contiene gli oggetti fisici ma anche quelli matematici che però stanno negli oggetti fisici, cioè coincidono con gli oggetti fisici stessi

La matematica non è né fisica né metafisica

Gottlob Frege

Accanto agli oggetti che cadono sotto i nostri sensi esistono – e giacciono su un diverso piano di realtà, nel senso che non vivono nello spazio e nel tempo – anche oggetti che possono essere una sorta di trasfigurazione di oggetti reali, gli oggetti ideali. Fra questi possiamo annoverare i numeri e i teoremi «non si può afferrare, né vedere, né sentire il numero cinque» (Heidegger, 1975, p. 54)

Gottlob Frege (le classi come le Idee non si costruiscono ma si scoprono – platonismo – teoria che inciampa sul paradosso di Russell) argomenta che l'ipotesi secondo cui i veri portatori del numero sarebbero gli oggetti o gli eventi esterni ordinari ha una conseguenza inaccettabile: una stessa cosa (ad es. un certo oggetto o evento esterno) può essere un'unità sotto una certa specificazione concettuale e, nel contempo, molte molteplicità diverse sotto specificazioni concettuali diverse, e ciò esclude che quella cosa possa essere considerata il vero portatore del numero

Per Frege il numero non può essere né spaziale o fisico né soggettivo, ma contestualmente non sensibile e oggettivo e dipendente dai contesti (1884, pp. 59-73, 259, 299)

Nulla può essere il vero portatore di qualcosa a meno che quel qualcosa non gli appartenga incondizionatamente

Edmund Husserl: oggetti ideali

Gli oggetti matematici, in opposizione agli oggetti fisici, sono “idealità” o essenze (Husserl 1938), ossia non sono singole individualità

Un teorema, un numero, un postulato non siamo in grado di indicarli perché sono per definizione indipendenti dal qui e dall’ora e non sono legati a un oggetto empirico, ma hanno uno statuto ontologico proprio

Siamo però in grado di indicare gli oggetti che incorporano le proprietà degli oggetti ideali

Negli oggetti ideali svolge un ruolo fondamentale l’immaginazione, la sola attività che è in grado di cogliere le essenze, in specie quelle matematiche. Per riconoscere relazioni racchiudibili in idealità la mente deve presentificare relazioni fra parti e momenti, così come avviene nel processo immaginifico degli oggetti fisici

Nuovo paradigma delle neuroscienze: intelligenza, memoria, atti e azioni motorie

Gli organi di senso ricevono i dati dall'ambiente → Il cervello pensa, rappresenta e comanda → L'organo fisico (mano, gamba, etc.) esegue il comando

Modello cognitivo-rappresentazionale

Atto motorio= percepire → Atti motori congruenti con le informazioni percepite

oggetto

Modello sensomotorio

Il cervello é nel corpo, il corpo é nell'ambiente
IL CORPO è NEL CERVELLO
Effetti epigenetici

24

Rilevante in tre ambiti, ma anche in quello che sta emergendo circa la matematica

1) Oggetti senza sistema motorio: manufatti

neuroni canonici: concetto di *affordance* (nessuna priorità fra oggetto e soggetto)

2) Oggetti con sistema motorio: esseri umani, animali, piante

neuroni specchio: comprensione degli atti e delle azioni degli esseri umani (gesti, sensazioni come piacere e dolore, emozioni, sentimenti, stati d'animo), dipinti, film, performance teatrali, letteratura

3) Linguaggio

neuroni specchio: categorie legate a oggetti con sistema motorio (esseri umani, animali, piante) e quelle senza sistema motorio, parole comuni, concetti concreti, concetti astratti, metafore (la matematica si esprime per metafore visive)

Campi di indagine

A) Ipotesi specifiche sull'acquisizione della conoscenza numerica

1) Come compare e si sviluppa la capacità di riconoscere le quantità?

2) Come compare e si sviluppa la capacità di codificare le quantità attraverso il sistema verbale dei numeri?

3) Come compare e si sviluppa la capacità di utilizzare il sistema simbolico dei numeri arabici?

Nuclei di indagine:

1) Lo sviluppo della conoscenza numerica preverbale

2) Lo sviluppo delle abilità di conteggio

3) Lo sviluppo delle abilità di lettura e scrittura del numero

B) Rapporto fra la conoscenza numerica e le altre competenze cognitive: la prospettiva assunta dalle ricerche contemporanee e soprattutto legata all'interdipendenza cognitiva dei sistemi di elaborazione dei numeri e del linguaggio

a) la sequenza numerica

b) la corrispondenza uno a uno fra le parole numero e gli elementi contati

c) il valore cardinale dei numeri

Al centro il corpo

Gli strumenti concettuali matematici si dividono in quattro categorie principali:

1) uso di parti del corpo: dita delle mani, dei piedi, naso, braccia, gambe

2) linguaggio vocale: vocaboli speciali usati per contare

3) linguaggio scritto: simboli numerici

4) aiuti esterni frutto dell'applicazione della conoscenza umana: incisioni di tacche, calcolatrici, etc.

Dall'osservazione

I bambini imparano a contare in modo corretto intorno ai tre anni e mezzo, arricchendo la loro padronanza della corrispondenza biunivoca; diventano consapevoli che si può variare l'ordine degli oggetti purché non se ne salti nessuno e nessuno venga contato più volte, e similmente la recitazione dei numerali non faccia salti o ripetizioni (uno, due, quattro, sette); ma spesso alla fine del conto ancora non posseggono il principio di cardinalità; a esso arrivano solo fino verso la fine del quarto anno. Poi incominciano a fare l'addizione, per esempio 2+1+4, con le dita, contando prima una mano e poi l'altra, magari usando il naso come indicatore; quindi passano a contare a voce, e devono imparare a contare quanto si conta, con il secondo addendo; la fase successiva è quella in cui partono da 2 invece di contare anche fino a 2; infine passano a contare partendo dall'addendo maggiore

I bambini che già dispongono chiaramente del principio di cardinalità non superano il compito della conservazione del numero perché principi (innati) diversi entrano in gioco nei due compiti dell'uso del linguaggio e dell'apprendere a contare

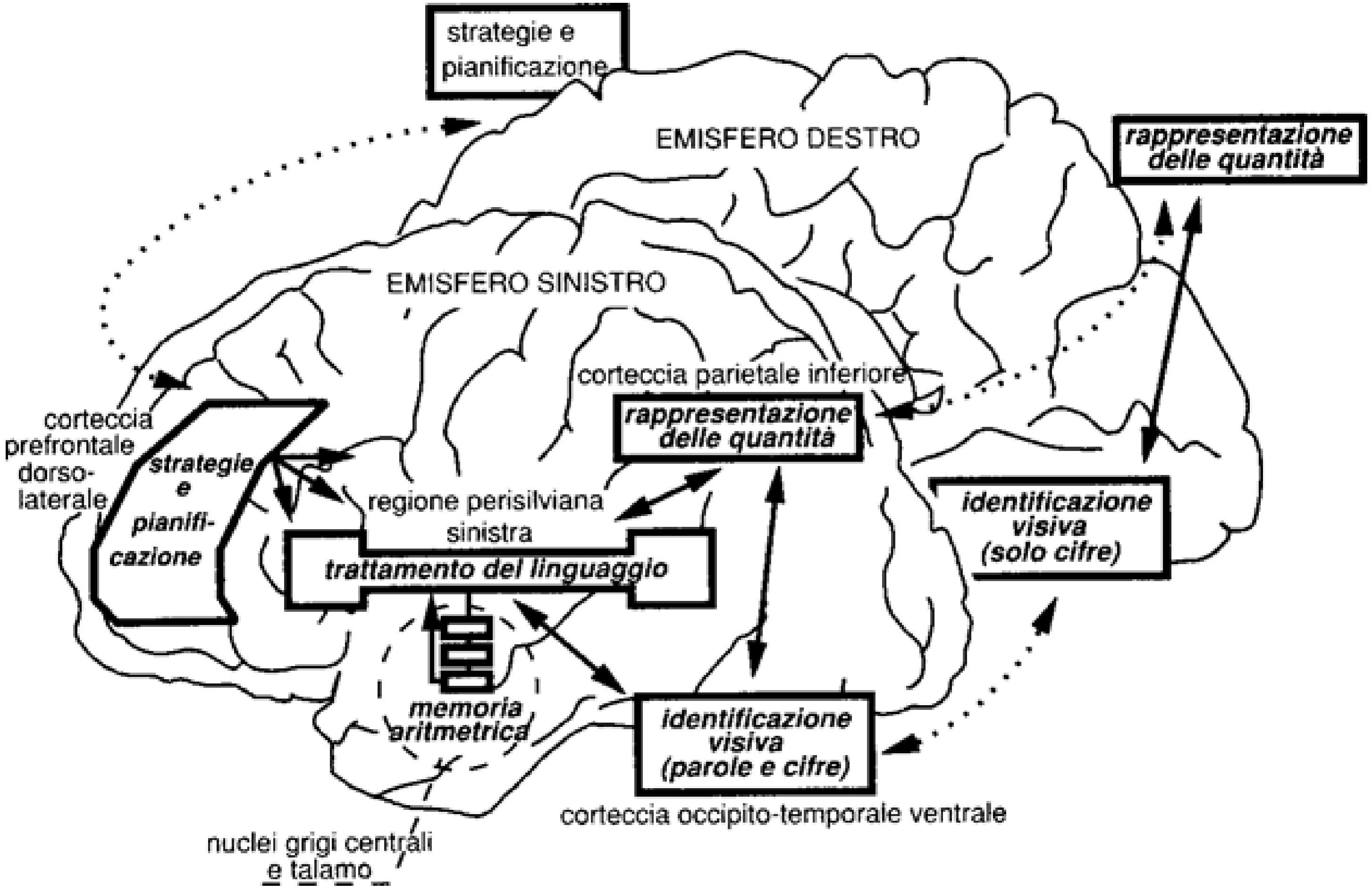
I bambini seguono due principi del linguaggio

Un principio del linguaggio è che gli oggetti della stessa categoria ricevono la stessa etichetta, o nome comune

Un secondo principio impone che se un oggetto ha una etichetta non può riceverne un'altra dello stesso livello categoriale. Di fronte a quattro cucchiai in fila, ognuno riceve la stessa etichetta «cucchiaio», «cucchiaio», «cucchiaio», «cucchiaio»; nel contarli, essi ricevono invece le etichette «uno», «due», «tre», «quattro», e se varia l'ordine, lo stesso cucchiaio riceve etichette diverse.

I principi del contare sono quelli dell'irrilevanza dell'oggetto e della stabilità dell'ordinamento, da cui i bambini imparano che i termini numerici non sono nomi degli oggetti. I bambini memorizzano in modo diverso rappresentazioni pertinenti al contare e al nominare, circostanza che suggerisce l'innatismo di questi diversificati principi guida.

Aree attualmente considerate coinvolte



Evoluzione comune con gli animali

«Abbiamo ragione di ritenere che esista un sistema evolutivamente conservato che permette agli animali di stimare le grandezze: si tratti di una distanza da compiere, un'attesa presso una fonte di cibo o il numero di predatori all'inseguimento. Sono capacità le cui basi genetiche e neurobiologiche si conservano tra le specie» Giorgio Vallortigara

I ratti e i piccioni, sono capaci di compiere calcoli elementari. sono in grado di rappresentare mentalmente delle quantità e di trasformarle secondo certe regole aritmetiche. Le loro capacità si basano su un accumulatore, un circuito cerebrale che funziona come una calcolatrice, in grado di tenere un registro di diverse grandezze numeriche. Si tratta di un vero e proprio senso numerico che permette la percezione del numero allo stesso modo di quella del colore, della forma o della posizione degli oggetti e offre, sia all'animale che all'essere umano, un istinto del numero, un'intuizione diretta delle quantità numeriche.

Nonostante la stretta relazione fra le prestazioni di varie specie di vertebrati con quelle umane nel manipolare quantità numeriche, solo fra esseri umani e primati c'è, al momento, una conferma di una profonda omologia dei substrati neurali che codificano per spazio, tempo e numero

E comunque i processi molecolari e cellulari sottostanti sono ancora sconosciuti

Tuttavia, a spingere i ricercatori verso l'ipotesi di una continuità filogenetica è il fatto che, nei vertebrati finora studiati, la cognizione numerica ha identiche caratteristiche, come l'effetto della distanza (è più facile confrontare 3 e 6 piuttosto che 4 e 5) e un effetto della grandezza (è più facile distinguere 2 e 3 piuttosto che numeri grandi, come 10 e 11).

Stanislas Dehaene: innatismo e acquisizione

Uno studio pionieristico (Starkey, Cooper, 1980) ha portato elementi a favore della tesi innatista dell'intelligenza numerica, e ha messo in luce, utilizzando la tecnica dell'abituazione-disabituazione osservando come bambini di soli 4-6 mesi reagiscono alla numerosità e dimostrano una primitiva rappresentazione della quantità (Anteli, Keating, 1983)

Nel bambino la stima numerica, il confronto, il contare, le addizioni e le sottrazioni semplici esistono spontaneamente, senza un'educazione esplicita, inoltre i bambini hanno un'aspettativa numerica in operazioni additive, cosicché il bambino «non è una tabula rasa che acquisisce i concetti matematici per pura astrazione» (Dehaene 2007, p. 101), infatti i neuroni della corteccia parietale dei due emisferi entrano in attività soltanto in presenza di numeri e restano sistematicamente silenziosi davanti ad altre parole, quindi, l'intuizione dei numeri è saldamente ancorata nel nostro cervello

La facoltà di contare sia innata e che i singoli numeri si acquisiscano dall'esperienza, cosicché elaboriamo gli oggetti ideali a partire dall'esperienza di quelli sensibili, tuttavia siamo in grado di procedere oltre le forme iniziali e di agire nel campo della pura astrazione

Il modello di Dehaene è detto "modello del triplo codice", vi sono tre diversi codici rappresentati in tre diverse aree cerebrali:

- **Processamento codice arabico (aree occipito-temporali ventrali bilaterali)**
- **Codifica verbale dei numeri (aree perisilviane sinistre)**
- **Rappresentazione analogica delle quantità (aree intraparietali bilaterali)**

Stanislas Dehaene: numerosità

Per Dehaene ci sono due rappresentazioni esatte di numerosità:

1) Rappresentazione esatta di numerosità per piccole quantità (subitizing), basato sulla percezione immediata della quantità, che si evolve da 2-3 elementi nei bambini prescolari a 4-5 elementi negli adulti. Non è chiaro se questo sistema venga coinvolto nei processi di enumerazione e calcolo e se sia in relazione con i sistemi simbolici di rappresentazione dei numeri
2) Rappresentazione approssimata di numerosità anche per grandi quantità, basato sulla rappresentazione della linea dei numeri. Questo sistema viene gradualmente messo in relazione con i sistemi simbolici di rappresentazione dei numeri per l'enumerazione e il calcolo.

Quindi, il nostro cervello tratta in maniera diversa gli insiemi contenenti al massimo tre elementi da quelli più grandi. La percezione della quantità per i numeri fino a tre è istantanea. Non contiamo ma ne percepiamo immediatamente la presenza. Si tratta di una vera e propria subitizzazione.

Anche i nostri 2 e 3 altro non sono che varianti grafiche, rispetto alla notazione araba da cui discendono, di due e tre tratti orizzontali sovrapposti. A partire dal 4, la notazione diventa simbolica e corrisponde a una capacità quasi esclusivamente umana di superare i limiti della percezione immediata delle quantità numeriche. Il tempo necessario per decidere la numerosità di un insieme aumenta in modo lineare passando da tre a sei. Quindi, più un numero è grande, più diminuisce la precisione della sua rappresentazione mentale, e per indicare questa incertezza usiamo i numeri approssimati

La teoria di Stanislas Dehaene trova grande approvazione negli studi del neuropsicologo Brian Butterworth e in Keith Devlin

Cosa sappiamo

1) Sede del cervello dove si trova la capacità di riconoscere i numeri (Josef Parvizi et al. 2013): porzione di mezzo centimetro situata nel giro temporale inferiore, una regione superficiale della corteccia esterna, interna all'area che processa le informazioni visive. Ci si domanda come il "circuito del calcolo" si connette questa area cerebrale, cioè quali e quando certe aree si connettono

2) La capacità di ragionare sui numeri a livello formale viene acquisita dopo quella di manipolare quantità di oggetti (Elisabeth Spelke 2002)

3) Il cervello umano stima la numerosità degli stimoli presenti nell’ambiente esterno (atto percettivo) con gli stessi circuiti cerebrali con cui ciascuno di noi conta il numero dei nostri stessi movimenti (azione intenzionale): il senso del numero è, cioè, condiviso fra la percezione e l’azione (Giovanni Anobile, Roberto Arrighi, Irene Togoli, David Charles Burr 2016)

4) Le costruzioni matematiche più astratte sono il frutto maturo dell’attività coerente del nostro cervello e di quello di altri milioni di persone che, prima di noi, hanno forgiato e selezionato gli strumenti matematici. Costruzioni matematiche che possono essere espresse solo attraverso un complesso formalismo matematico e che sono basate sull'innato senso della quantità e sulla nostra conoscenza intuitiva di spazio, tempo e numerosità (Marie Amalric, Stanislas Dehaene 2016)

Cosa sappiamo: connessioni con il linguaggio

5) La capacità numerica del calcolo esatto sembra essere connessa al linguaggio (ritmo 1-2-3?), mentre quella del calcolo approssimato non risiede nel campo verbale, bensì in quello visuo-spaziale (Dehaene 1995)

6) Anche il pensiero matematico più sofisticato si fonda sui circuiti neurali che ci permettono una conoscenza intuitiva dei piccoli numeri e che sono chiaramente distinti dai circuiti che gestiscono il linguaggio, le regioni attivate nei matematici dalle proposizioni matematiche di alto livello sono le stesse che vengono attivate – sia nei matematici che nei non matematici – dai piccoli numeri e da operazioni minimali su di essi. Pertanto anche il pensiero matematico, il più sofisticato, si basa sulla stessa rete neurale del fondamentale "senso del numero". Con la crescita del cervello non si ha un aumento della potenza di questo modulo, ma su di esso s'inserisce lo sviluppo della matematica simbolica e qui interverrebbero i circuiti del linguaggio.

Nel corso della sua evoluzione l'essere umano è stato dotato di un meccanismo supplementare rispetto all'animale: il linguaggio e, più in generale, la capacità di immaginare un vasto sistema di simboli scritti e orali. Nella matematica simbolica, un'impresa molto complessa, intervengono circuiti collegati o derivati da quelli linguistici, sia lessicali che grammaticali, insieme alla memoria e alla capacità di coordinamento (Starkey, Spelke, Gelman 1990; Van Loosbroek e Smistman 1990; Butterworth 1999)

E i matematici?

7) Una ricerca ha mostrato che la riflessione su enunciati di tipo matematico (non contenevano numeri) attiva, nei soli matematici, una rete specifica che comprende le aree parietali e frontali della corteccia

Queste aree appaiono essere anatomicamente ben distinte da quelle implicate nel linguaggio verbale e nella conoscenza semantica, ma sono invece le medesime, seppure rivelino nei matematici di professione un'attività amplificata, usate nella valutazione di semplici problemi inerenti spazio e numero anche da chi non ha alcun addestramento particolare in matematica

L'attivazione di queste aree consente di osservare in maniera specifica, quale che sia il particolare dominio matematico espresso nell'enunciato - algebra, topologia, geometria o analisi -, lasciando invece sistematicamente escluse le aree del linguaggio

I test hanno rivelato una sorprendente relazione bi-direzionale con le abilità aritmetiche formali che si acquisiscono a scuola (Daitch, A. L., Foster, B. L., Schrouff, J., Rangarajan, V., Kasikçi, I., Gattas, S., Parvizi, J.

2016)

Cosa sappiamo: i numeri emozionano

8) I numeri suscitano emozioni condizionate dai contesti culturali:

- **i numeri tondi come 10 o 100 veicolano durevolezza delle prestazioni (Jorge Pena-Marin 2016)**
- **i numeri tondi (0, 5) sono utilizzati dai brand per l'idea di completezza che trasmettono**
- **i numeri più noti delle tabelline – più familiari per averli studiati e perché li ritroviamo più spesso nella realtà – danno un maggior senso di confidenza e ci piacciono di più, vale anche nei loro multipli (Marisca Milikowski 1995, Martijn van den Assen 2016)**

La famosa metafora della mente come computer ha rafforzato l'idea di una razionalità basata su procedimenti logico-matematici e a escluso da moltissimi campi il ruolo delle emozioni

Personalmente credo che se si approfondirà la questione del ritmo si arriverà a comprendere il ruolo che le emozioni svolgono nel determinare il "senso del numero"

Che resta di Platone e di Aristotele

Platone: innato "senso del numero"

Aristotele: il vincolo esperienziale